SOTE EKK EIFTI Algebra, valószínűségelmélet

2. ZH

Dátum: *2013.05.17.*

Név:

Neptun-kód:

1. *(10 pont)*	2. *(10 pont)*	3. *(4+6 pont)*	4. *(10 pont)*	5. *(10 pont)*	Σ *(50 pont)*

1. Egy szabályos kockát kétszer feldobunk. Legyen az A esemény az, hogy a két dobott szám összege 6 és a B esemény az, hogy az első dobás értéke 4. Független-e az A és a B esemény?

2. Egy vizsgán minden vizsgakérdéshez három lehetséges válasz van megadva, egy helyes közülük. A vizsgázó $p = 0,6$ valószínűséggel tudja a helyes választ, ha nem tudja, akkor $\frac{1}{3}$ valószínűséggel jelöli meg a három válasz valamelyikét. Az egyik választ megnézve látjuk, hogy helyes. Mennyi a valószínűsége, hogy valóban tudta is a választ?

3.
   (a) Jelölje az ötös lottón a kihúzott öt szám közül nagyság szerint a középsőt X. Mennyi az X eloszlásfüggvénye a $10 \cdot \pi$ helyen, azaz mennyi az $F_X(10 \cdot \pi)$ érték?
   (Az ötös lottón 90 számból húznak 5-öt visszatevés nélkül.)

   (b) Ha tudjuk, hogy $Y \in E(2)$, akkor mennyi az $M(1-Y)^2$ és a $D^2(4-3Y)$ értéke?
   ($E(\lambda)$ a λ paraméterű exponenciális eloszlás)

4. Tízszer dobunk egy szabályos kockával. Jelölje X hányszor kaptunk közben hárommal osztható számot. Mekkora a $P(2 \leq X \leq 3)$ valószínűség? Mekkora X várható értéke és szórása?

5. Lehet-e valamely folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvény az alábbi függvény?

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 + 3x + \sin x, & \text{ha } x \in [0,4] \\ 0, & \text{ha } x \notin [0,4] \end{cases}$$

Sikeres munkát kívánok!

Sándor Zoltán (sandor.zoltan.14@gmail.com)

Megoldások pontozással

1. Az A és B események függetlenek, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Az $A = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$ és $B = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Tehát $P(A) = \frac{5}{36}$ és $P(B) = \frac{6}{36}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Valamint $P(AB) = \frac{1}{36}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Ekkor $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$, azaz nem függetlenek.
   (Helyes lépés 2 pont.)

2. Legyen T az az esemény, hogy a hallgató tudja a választ és H pedig, hogy helyes választ adott.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Ekkor $P(T) = p = 0,6$ és $P\left(\overline{T}\right) = 1 - p = 0,4$. A $P(H|T) = 1$ és $P\left(H|\overline{T}\right) = \frac{1}{3}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   A $T, \overline{T}$ teljes eseményrendszert alkot, valamint $P(T), P\left(\overline{T}\right) > 0$ és $P(H) > 0$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   A feltételek teljesülnek, ezért alkalmazzuk a Bayes-tételt:
   $$P(T|H) = \frac{P(H|T) \cdot P(T)}{P(H|T) \cdot P(T) + P\left(H|\overline{T}\right) \cdot P\left(\overline{T}\right)} = \frac{1 \cdot 0,6}{1 \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,4} = \frac{45}{55} \approx 0,82.$$
   (Helyes lépés 4 pont.)

3.
   (a) Az $F_X(10\pi) = P(X < 10\pi) = P(X \leq 31)$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Ekkor $P(X \leq 31) = \sum\limits_{k=3}^{31} \frac{\binom{k-1}{2}\binom{90-k}{2}}{\binom{90}{5}}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   (b) Mivel $Y \in E(2)$, ezért $M(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ és $D^2(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$.
   (Helyes lépés 1 pont.)
   Az $M(1-Y)^2 = M\left(1 - 2Y + Y^2\right) = 1 - 2 \cdot M(Y) + M\left(Y^2\right)$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   A Steiner-tétel alapján $M\left(Y^2\right) = D^2(Y) + (M(Y))^2$.
   (Helyes lépés 1 pont.)
   Tehát $M(1-Y)^2 = 1 - 2 \cdot M(Y) + M\left(Y^2\right) = 1 - 2 \cdot M(Y) + D^2(Y) + (M(Y))^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
   (Helyes lépés 1 pont.)
   Valamint $D^2(4 - 3Y) = 9D^2(Y) = \frac{9}{4}$.
   (Helyes lépés 1 pont.)

4. A szöveg alapján X binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = \frac{1}{3}$ paraméterekkel.
   (Helyes lépés 3 pont.)
   Ekkor $P(2 \leq X \leq 3) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{26880}{59049} \approx 0,455$.
   (Helyes lépés 4 pont.)
   Ekkor $M(X) = n \cdot p = \frac{10}{3}$ és $D^2(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{20}{9}$, azaz $D(X) = \frac{\sqrt{20}}{3}$.
   (Helyes lépés 3 pont.)

5. Ahhoz, hogy $f(x)$ valamely folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen, teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Az $f(x) \geq 0$ feltétel teljesül mivel $f(x)$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív.
   (Helyes lépés 1 pont.)
   A $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dt = \int\limits_{0}^{4}\left(e^x + x^2 + 3x + \sin x\right)dt = \left[e^x + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \cos x\right]_0^4 = e^4 + \frac{64}{3} + 24 - \cos(4) - (1+1) \neq 1$.
   (Helyes lépés 6 pont.)
   Ezért ez a függvény nem lehet egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.
   (Helyes lépés 1 pont.)

Sándor Zoltán (sandor.zoltan.14@gmail.com)