SE EKK EIFTI Algebra, valószínűségelmélet

2. ZH

Dátum: *2014.05.05.*

Név:

Neptun-kód:

1. *(10 pont)*	2. *(10 pont)*	3. *(4+6 pont)*	4. *(5+2+3 pont)*	5. *(10 pont)*	Σ *(50 pont)*

1. Egy szabályos kockát kétszer feldobunk. Legyen az A esemény az, hogy a két dobott szám szorzata 8 és a B esemény az, hogy a második dobás értéke 2. Független-e az A és a B esemény?

2. Két urna közül az egyikben 6 piros és 4 fehér, a másikban 5 piros és 3 fehér golyó van. Találomra kiválasztjuk az egyik urnát és abból találomra kihúzunk egy golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a golyó piros?

3.
   (a) Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke 10, szórása 4. Adja meg az eloszlásfüggvényét!

   (b) Ha tudjuk, hogy $Y \in Po\left(\frac{1}{5}\right)$, akkor mennyi az $M\left(2+3Y\right)^2$ és a $D^2\left(6+5Y\right)$ értéke?
   ($Po\left(\lambda\right)$ a λ paraméterű Poisson-eloszlás)

4.
   (a) Az X valószínűségi változó értéke legyen a hagyományos 90/5 lottóhúzás során a kihúzott számok közül a hárommal osztható számok száma. Adja meg az X valószínűségi változó eloszlását!

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy az összes kihúzott szám hárommal osztható lesz?

   (c) Számítsa ki az X várható értékét és szórását!

5. Lehet-e valamely folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvény az alábbi függvény?

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 10x^6+2e^x+\cos x, & \text{ha } x\in[1,2] \\ 0, & \text{ha } x\notin[1,2] \end{cases}$$

Sikeres munkát kívánok!

Sándor Zoltán (sandor.zoltan.14@gmail.com)

Megoldások pontozással

1. Az A és B események függetlenek, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Az $A = \{(2,4),(4,2)\}$ és $B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Tehát $P(A) = \frac{2}{36}$ és $P(B) = \frac{6}{36}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Valamint $P(AB) = \frac{1}{36}$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   Ekkor $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$, azaz nem függetlenek.
   (Helyes lépés 2 pont.)

2. Legyen az A esemény, hogy a kihúzott golyó piros. Legyen a B_1 esemény, hogy az első urnából húzunk és a B_2 esemény, hogy a második urnából húzunk.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   A B_1, B_2 teljes eseményrendszert alkot, mivel $B_1 \cup B_2 = \Omega$ (valamelyikből húzunk) és $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ (egyszerre csak az egyikből húzhatunk). Valamint $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2} > 0$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   A feltételek teljesülnek, ezért alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

   (Helyes lépés 2 pont.)

$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{5}{16} = \frac{49}{80} = 0,6125.$$

   (Helyes lépés 4 pont.)

3.

   (a) Legyen X egyenletes eloszlású az $]a, b[$ intervallumon és $M(X) = 10$ és $D(X) = 4$.
   (Helyes lépés 0,5 pont.)
   A várható érték és a szórás is kifejezhető az eloszlás paramétereiből $M(X) = \frac{a+b}{2} = 10$ és $D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 4$.
   (Helyes lépés 1 pont.)
   Ezt megoldva kapjuk, hogy $a = 10 - 4\sqrt{3}$ és $b = 10 + 4\sqrt{3}$.
   (Helyes lépés 1 pont.)
   Ezek alapján az eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha}\, x \leq 10 - 4\sqrt{3} \\ \frac{x-10+4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}, & \text{ha}\, 10 - 4\sqrt{3} < x < 10 + 4\sqrt{3} \\ 1, & \text{ha}\, 10 + 4\sqrt{3} \leq x \end{cases} .$$

   (Helyes lépés 1,5 pont.)

   (b) Mivel $Y \in Po\left(\frac{1}{5}\right)$, ezért $M(Y) = \lambda = \frac{1}{5}$ és $D^2(Y) = \lambda = \frac{1}{5}$.
   (Helyes lépés 1 pont.)
   Az $M(2+3Y)^2 = M\left(4 + 12Y + 9Y^2\right) = 4 + 12 \cdot M(Y) + 9 \cdot M\left(Y^2\right)$.
   (Helyes lépés 2 pont.)
   A Steiner-tétel alapján

$$M\left(Y^2\right) = D^2(Y) + (M(Y))^2 .$$

   (Helyes lépés 1 pont.)
   Tehát

$$M(2+3Y)^2 = 4 + 12 \cdot M(Y) + 9 \cdot M\left(Y^2\right) = 4 + 12 \cdot M(Y) + 9 \cdot \left(D^2(Y) + (M(Y))^2\right) =$$

$$= 4 + 12 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right) = \frac{214}{25} = 8,56.$$

   (Helyes lépés 1 pont.)
   Valamint

$$D^2(6+5Y) = 25 \cdot D^2(Y) = 5.$$

   (Helyes lépés 1 pont.)

4.

(a) Ha az X a kihúzott hárommal osztható számok számát jelenti, akkor X hipergeometriai eloszlást követ, ahol $N = 90$ és $M = 30$ és $n = 5$.
(Helyes lépés 1 pont, helyes lépés 0,5 pont, helyes lépés 0,5 pont, helyes lépés 0,5pont.)
Ekkor az X eloszlása

$$p_k = \frac{\binom{30}{k}\binom{60}{5-k}}{\binom{90}{5}} \quad (k = 0, 1, \ldots, 5).$$

(Helyes lépés 2,5 pont.)

(b) A kérdés arra vonatkozik, amikor $k = 5$, azaz a keresett valószínűség

$$p_5 = \frac{\binom{30}{5}\binom{60}{0}}{\binom{90}{5}} \approx 0,0032.$$

(Helyes lépés 2 pont.)

(c) A hipergeometriai eloszlás miatt felhasználva az általános képleteket

$$M(X) = n \cdot \frac{M}{N} = \frac{5}{3}$$

és

$$D(X) = \sqrt{\frac{(MN - M^2)(Nn - n^2)}{N^3 - N^2}} \approx 1,03.$$

(Helyes lépés 1,5 pont, helyes lépés 1,5 pont.)

5. Ahhoz, hogy $f(x)$ valamely folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen, teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$ és $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.
(Helyes lépés 2 pont.)
Az $f(x) \geq 0$ feltétel teljesül, mivel $f(x)$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív.
(Helyes lépés 1 pont.)
A $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{1}^{2} \left(10x^6 + 2e^x + \cos x\right) dx = \left[\frac{10}{7}x^7 + 2e^x + \sin x\right]_1^2 = \frac{10}{7}2^7 + 2e^2 + \sin 2 - \left(\frac{10}{7} + 2e + \sin 1\right) \neq 1.$
(Helyes lépés 6 pont.)
Ezért ez a függvény nem lehet egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.
(Helyes lépés 1 pont.)

Sándor Zoltán (sandor.zoltan.14@gmail.com)